



Računarska grafika

predavanja
v.prof.dr. Samir Lemeš
slemes@unze.ba

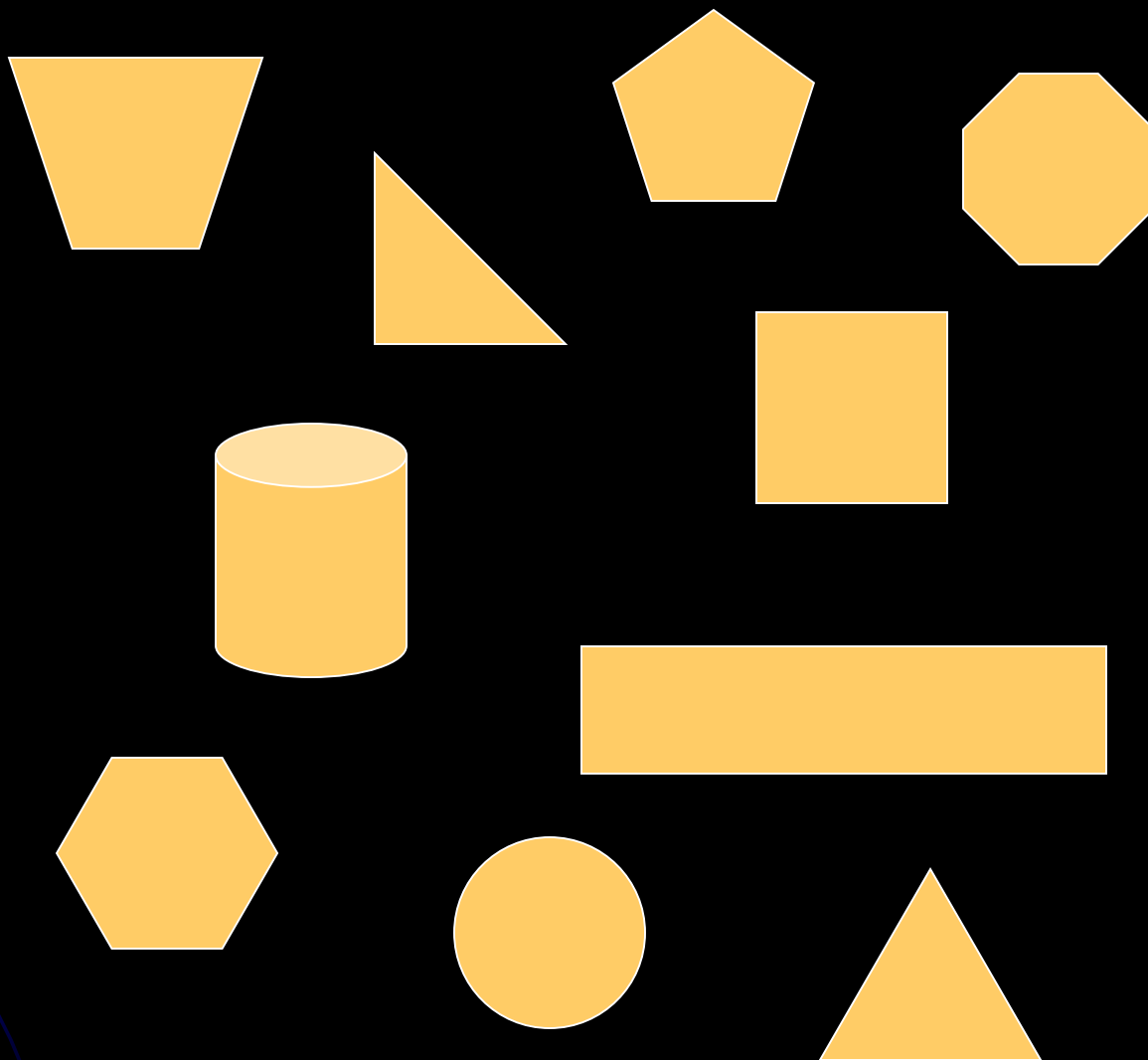
Fraktali

- Euklidska geometrija
- Šta je fraktal?
- Osobine
- Podjela
- Generisanje
- Primjeri



Euklidska geometrija

- Trouglovi
- Krugovi
- Kvadrati
- Pravougaonici
- Trapezoidi
- Petouglovi
- Šestouglovi
- Osmouglovi
- Cilindri



Euklidska geometrija

- Može li se opisati priroda korištenjem Euklidske geometrije?
 - Drvo pomoću cilindara??
 - Planine pomoću trouglova??
 - Oblaci krugovima??
 - Lišće??
 - Stijene??



Euklidska geometrija

- Standardni objekti (napravljeni ljudskom rukom) se mogu predstaviti Euklidskom geometrijom
- Opisani su jednačinama (funkcijama)
- Tako se dobiju glatki, pravilni objekti:
 - lopte, poligoni, B-spline površine
- Prirodni objekti (oblaci, lišće, stijene) se bolje modeliraju korištenjem fraktalne geometrije

Šta je fraktal?

- Benoit Mandelbrot, 1982,
“oblaci nisu lopte, planine nisu konusi,
obale nisu krugovi, balvani nisu glatki, niti
munje putuju pravolinijski.”
- Objekti se predstavljaju **procedurama**
umjesto jednačinama
- Ponavljanjem procedure
fraktala dobiju se
sve kompleksniji detalji



Definicije fraktala

- Mandelbrot:
- Fraktal je metrički prostor za koji je Hausdorff-Besicovitch dimenzija D veća od topološke dimenzije D_T
- Karakteristika fraktala je neograničen proces ponavljanih transformacija invarijantne geometrijske forme.

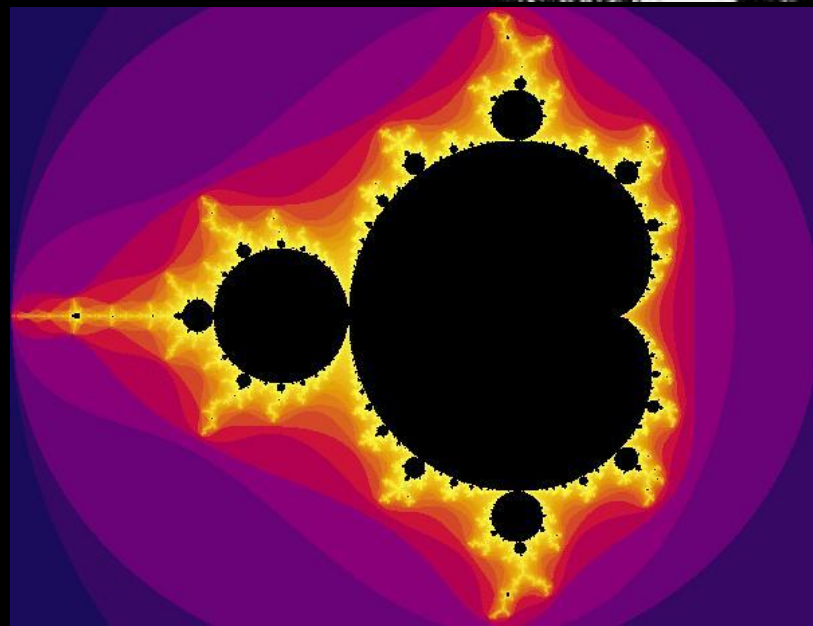
Kako su otkriveni fraktali?

- Henri Poincaré, francuski matematičar, 1887 – teorija haosa.
- Lorenz je 1972. objavio članak "Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil set off a Tornado in Texas?" (Da li pokret krila leptira u Brazilu izaziva tornado u Teksasu)
- Senzitivna zavisnost od početnih uslova



Kako su otkriveni fraktali?

- Gaston Julia, početak XX vijeka: istraživanja iterativnih funkcija.
- Do 1960ih se ništa nije razvijalo usljed nedostatka tehnologije.
- 1970ih je Mandelbrot upotrijebio računare da kreira "Mandelbrot Set".



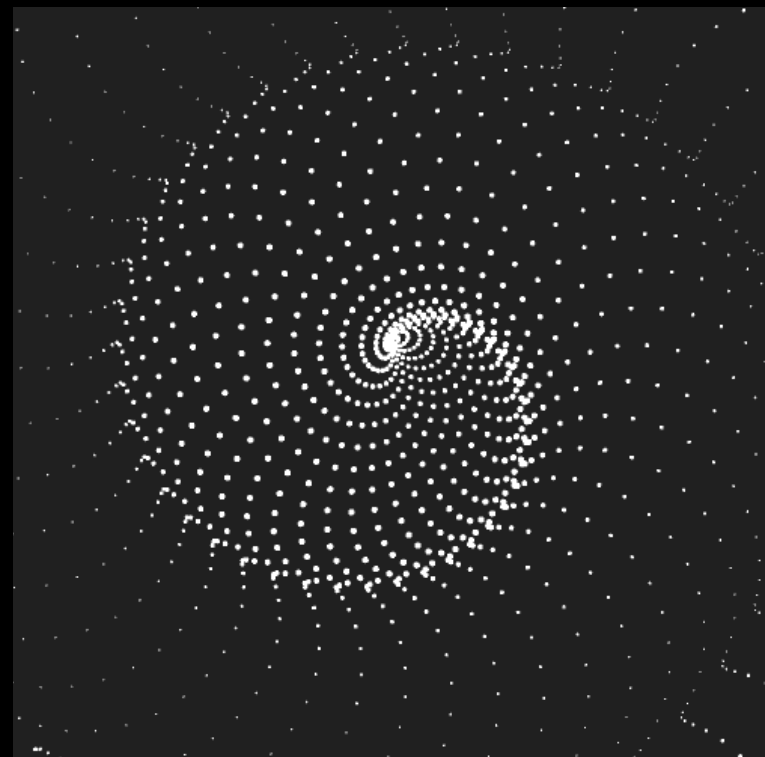
Kako su otkriveni fraktali?

- Zaposlenik IBMa, Benoit Mandelbrot bio je matematičar koji je ispitivao fluktuacije cijena pamuka. Bez obzira na način analiziranja, podaci nikad nisu slijedili normalnu distribuciju.
- Kad je Mandelbrot dobio sve podatke o cijenama od 1900 i analizirao ih pomoću IBM računara, primijetio je da brojevi koji su izazivali odstupanja od normalne distribucije dovode do simetrije skaliranja.
- Sekvenca promjena je bila nezavisna od skale: krivulje za dnevne i za mjesečne promjene cijena su se savršeno poklapale.

(James Gleick, Chaos - Making a New Science, pg. 86)

Osobine fraktala

- U svakoj tački fraktala ima beskonačno mnogo detalja
- Postoji sličnost između dijelova objekata i objekta kao cjeline
- Dimenzije nisu cijeli brojevi (1D, 2D, 3D)
- Nemaju određenu veličinu ili skalu



Podjela fraktala

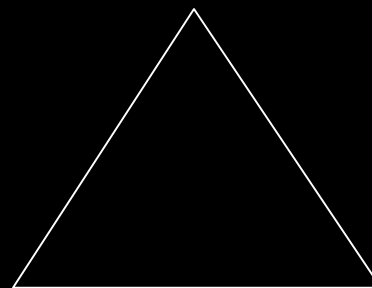
- Samoslični fraktali (*Self-similar*)
 - Dijelovi su umanjene verzije početnog objekta
 - Deterministički "self-similar"
 - Nisu stohastički
 - Statistički "self-similar"
 - Sadrže određen stepen slučajnosti
- Afini fraktali (*Self-affine*)
 - Različiti parametri skaliranja u različitim smjerovima koordinata
- Invarijantni setovi fraktala
 - Formirani nelinearnim transformacijama

Samoslični fraktali

- Dijelovi su umanjene verzije cijelog objekta
 - Polazi se od početnog oblika
 - Kreiraju se poddijelovi dupliranjem i skaliranjem početnog oblika
- Za različite dijelove se mogu koristiti različiti faktori skaliranja
- Primjer: von Koch pahuljica
 - Mogu se uvesti i slučajne varijacije
 - Ti fraktali su “statistički samoslični”
 - Koriste se za modeliranje drveća, lišća,...

Von Koch pahuljica

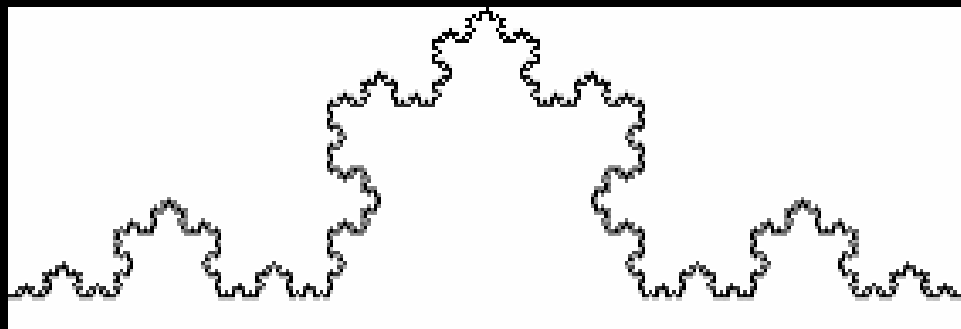
- Počne se sa inicijatorom:



- I generatorom:

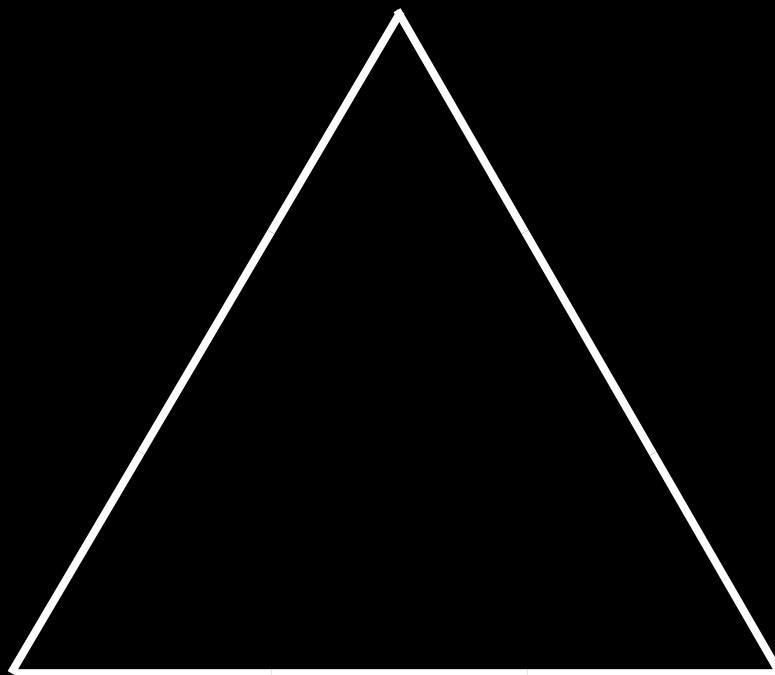


- Kod svake iteracije, mijenja se svaki komad inicijatora generatorom
- Dimenzija Von Koch fraktala: 1,261859507



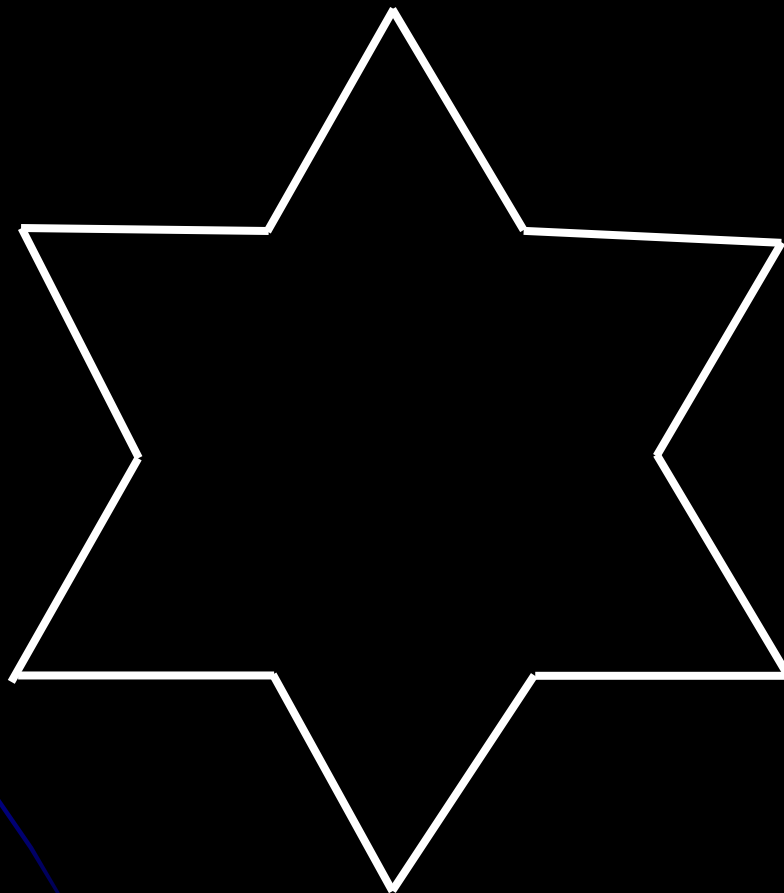
Von Koch pahuljica

- Iteracija 0:



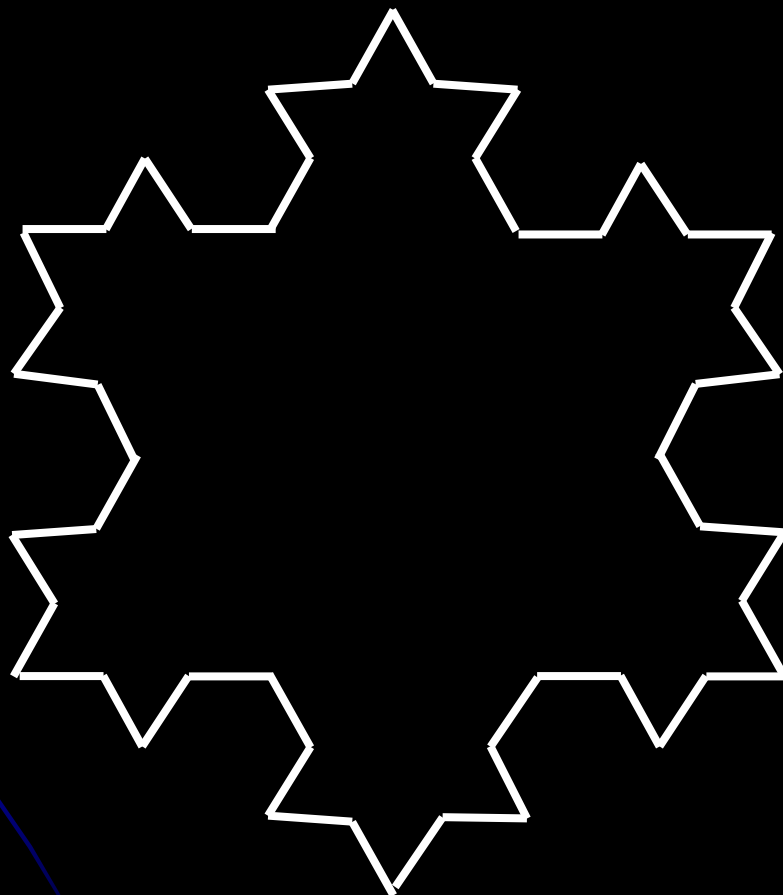
Von Koch pahuljica

- Iteracija 1:



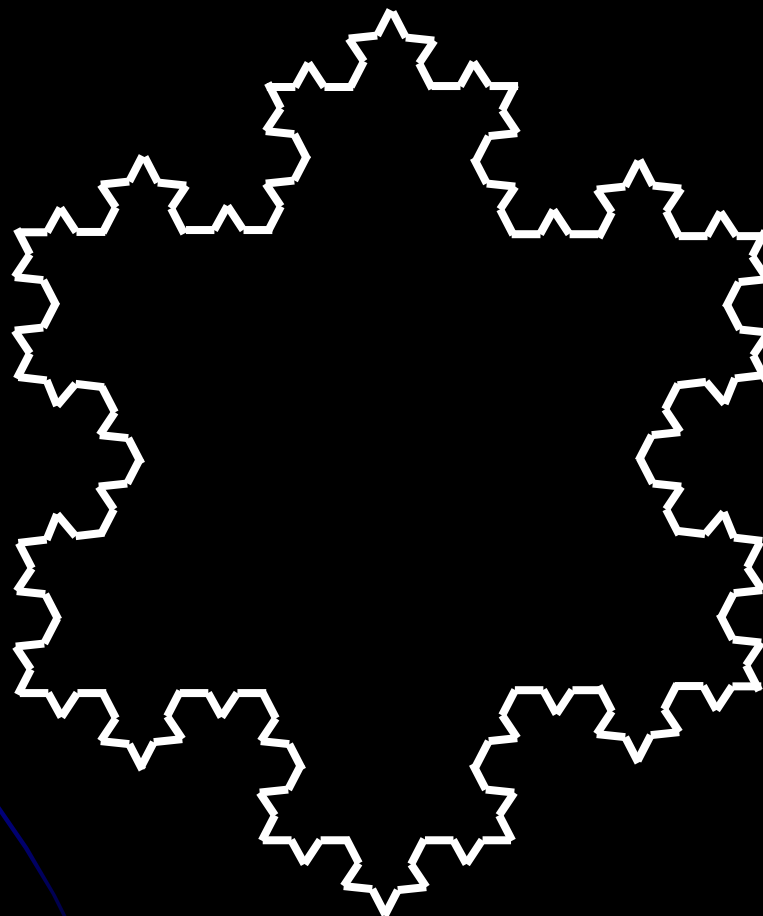
Von Koch pahuljica

- Iteracija 2:



Von Koch pahuljica

- Iteracija 3:



Helge von Koch, švedski matematikar 1870 - 1924

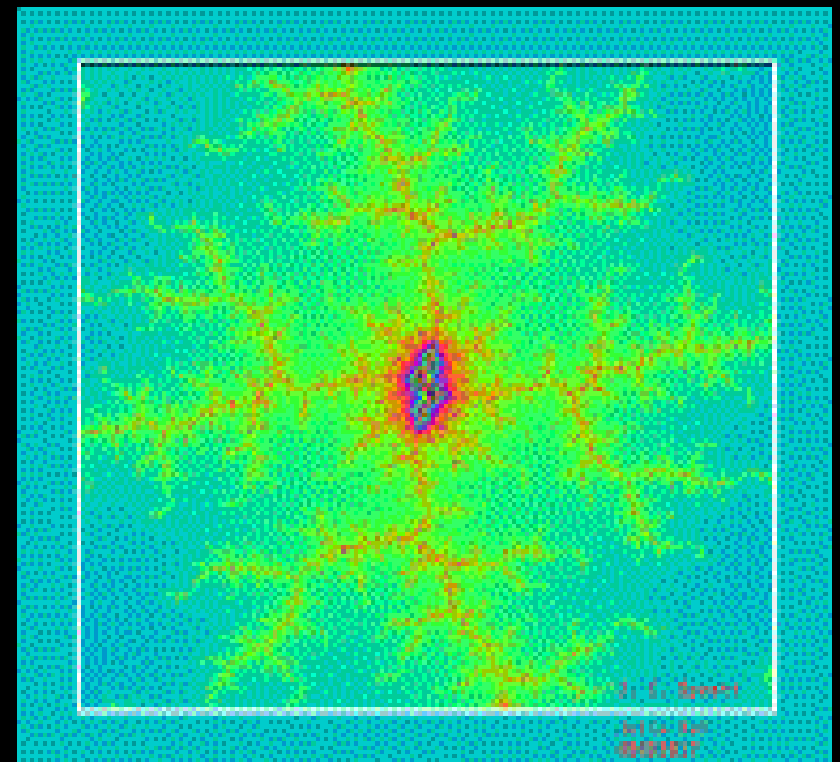
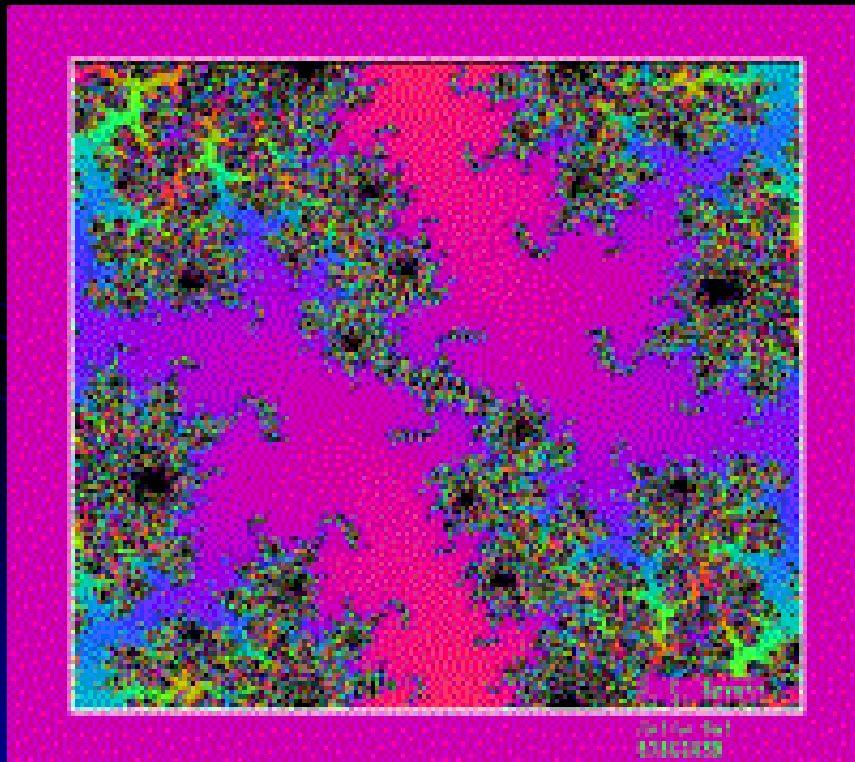
Statistički samoslični fraktali

- Samoslični fraktali kod kojih se vrše slučajne varijacije na poddijelovima



Invarijantni setovi fraktala

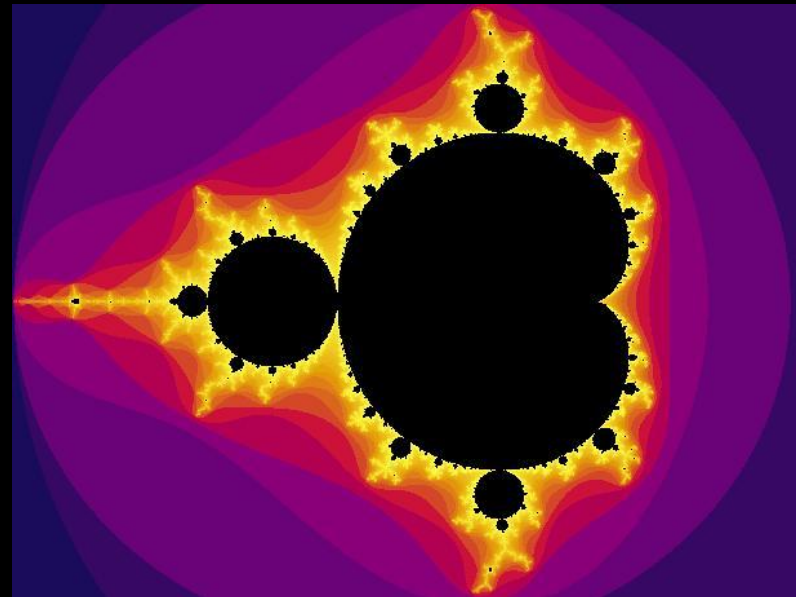
- Formiraju se nelinearnim transformacijama



Mandelbrot Set

- Iteracija kompleksne funkcije
- Boja tačke u prostoru se bira na osnovu brzine divergencije funkcije u toj tački
- U setu su i tačke koje ne divergiraju
- Set se obično počinje sa crnom bojom, a zatim se brzina divergencije boji bojama iz spektra

$$f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto z^2 + c$$

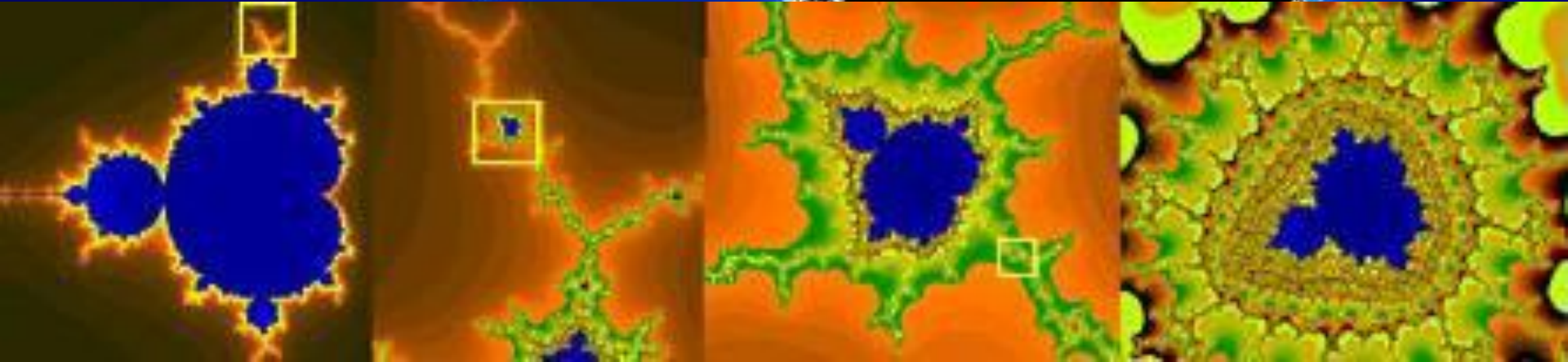
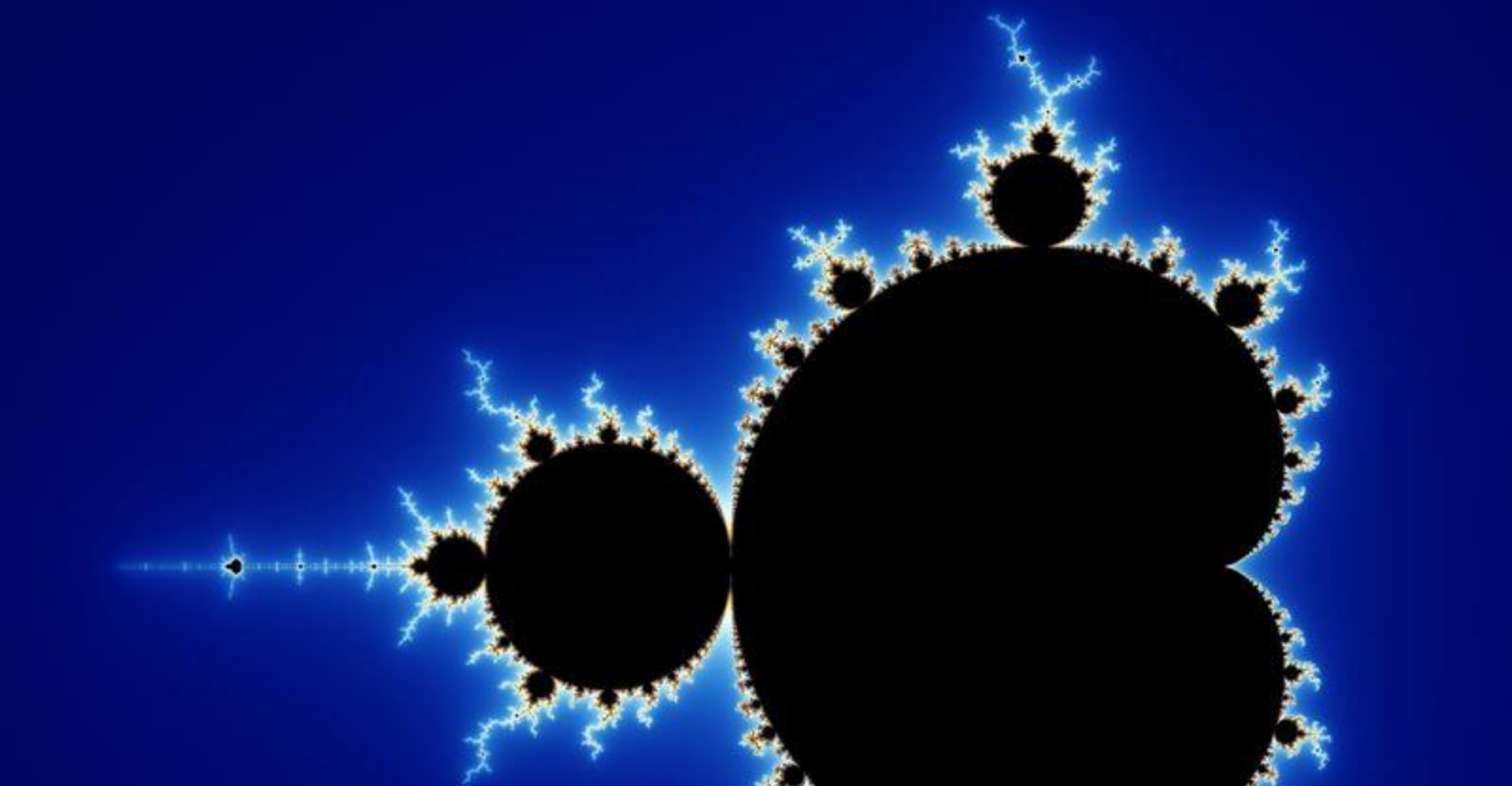


Mandelbrot Set

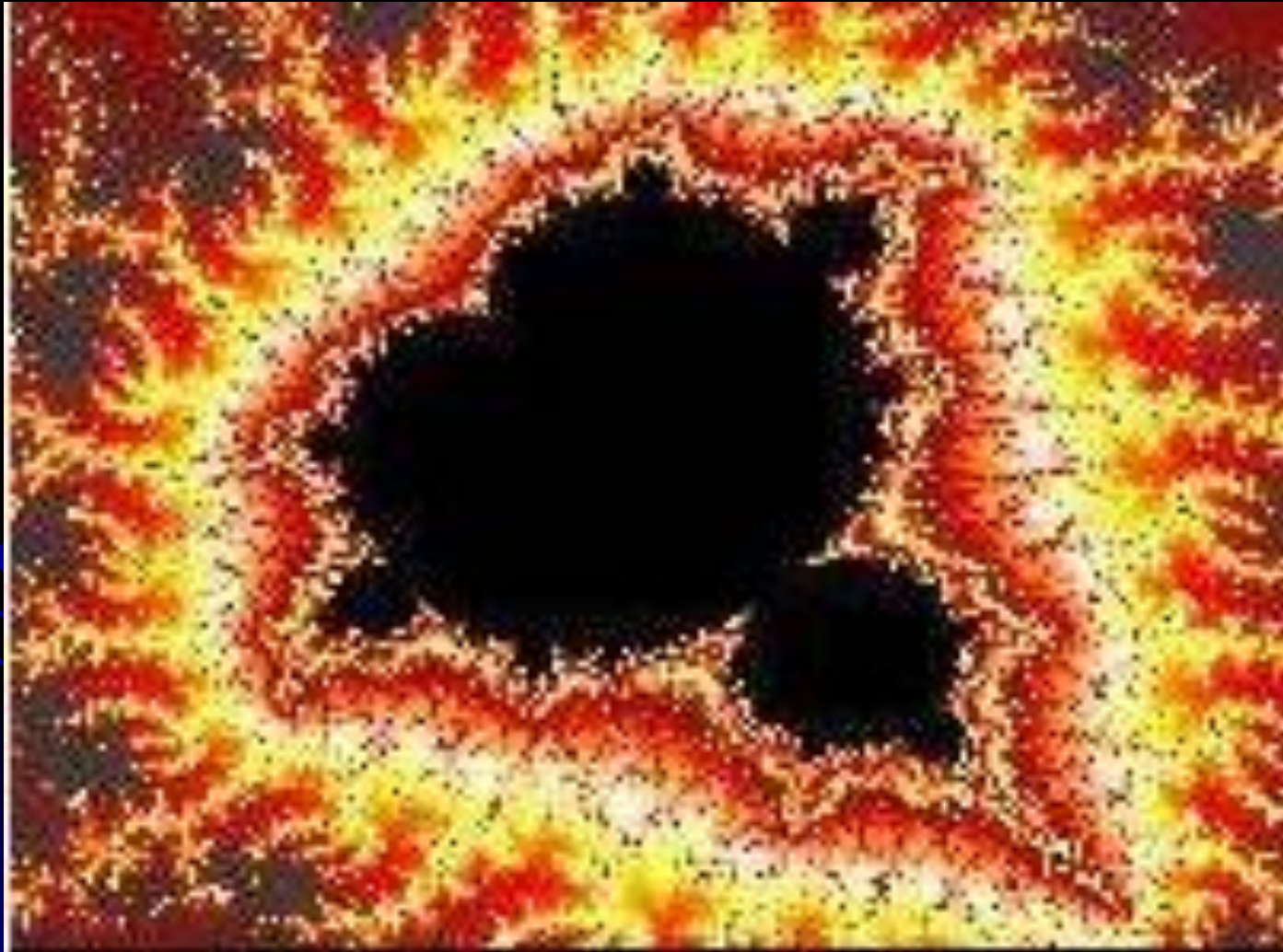


Benoît Mandelbrot,
matematičar

Rođen 1924. u Poljskoj,
školovan u Francuskoj,
živio i radio u SAD.
Umro 2010.



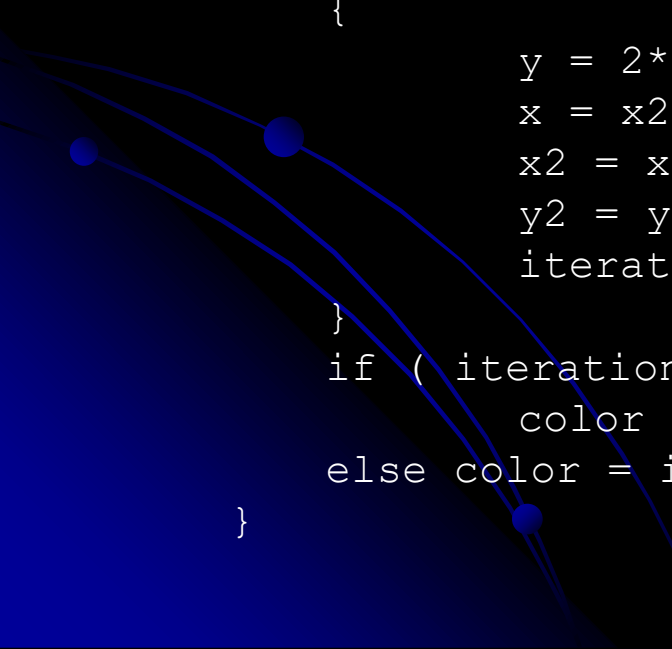
Zumiranje u Mandelbrot Set



Izračunavanje Mandelbrot seta

Za svaki piksel na ekranu:

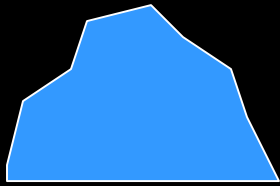
```
{  
    x = x0 // x koordinata piksela  
    y = y0 // y koordinata piksela  
    x2 = x*x  
    y2 = y*y  
    iteration = 0  
    maxiteration = 1000  
    while ( x2 + y2 < (2*2) AND iteration < maxiteration )  
    {  
        y = 2*x*y + y0  
        x = x2 - y2 + x0  
        x2 = x*x  
        y2 = y*y  
        iteration = iteration + 1  
    }  
    if ( iteration == maxiteration )  
        color = black  
    else color = iteration  
}
```



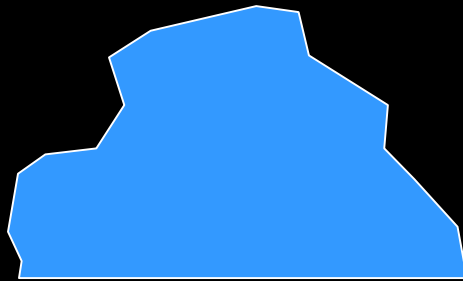
Generisanje fraktala

- Fraktal se generiše uzastopnim ponavljanjem određene transformacije
- Transformacija se može primijeniti na set tačaka, set primitiva (linije, krivulje, boje, itd.), li na bilo šta drugo
- Teoretski, procedura se primjenjuje beskonačno mnogo puta
- Praktično se vrši iteracija konačan broj puta, do određene granice.

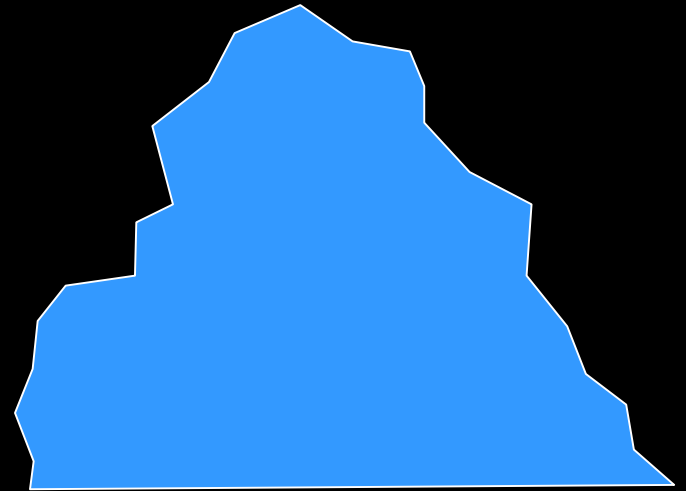
Fraktalne planine



Planina u daljini



Bliži pogled

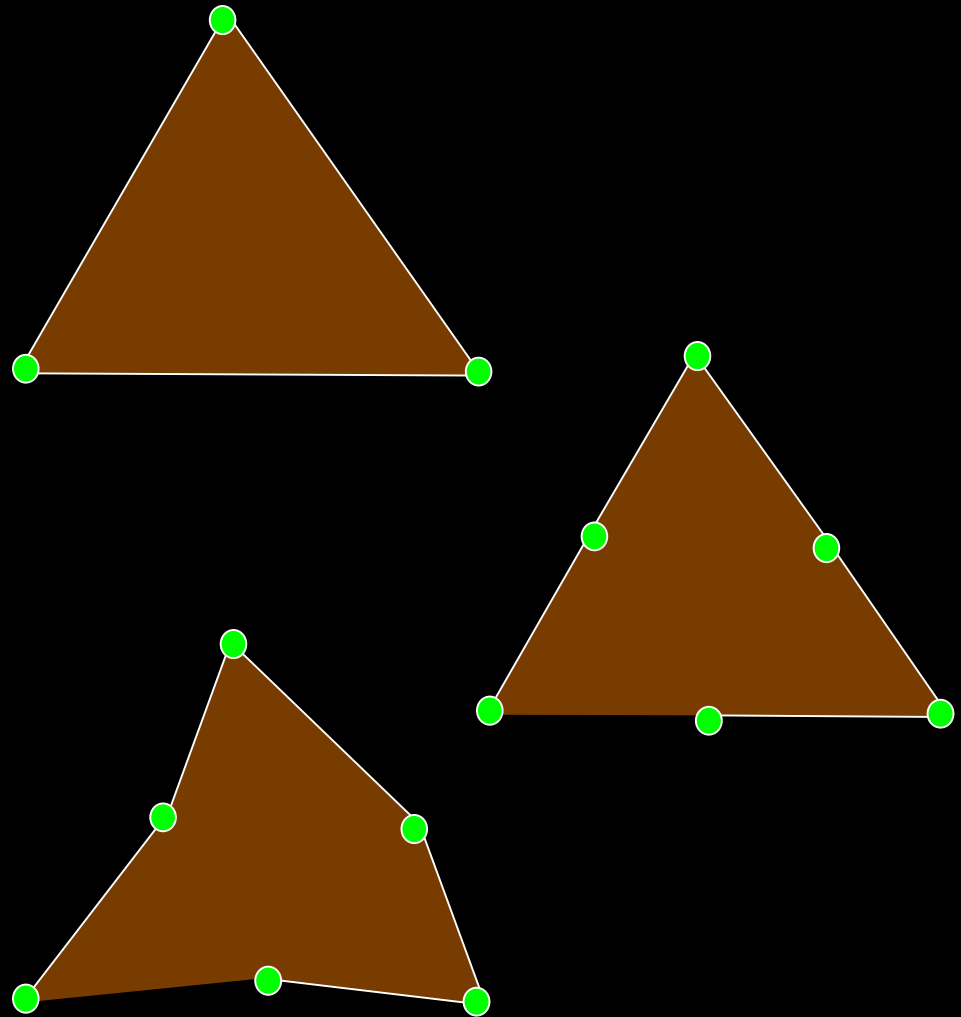


Još bliže

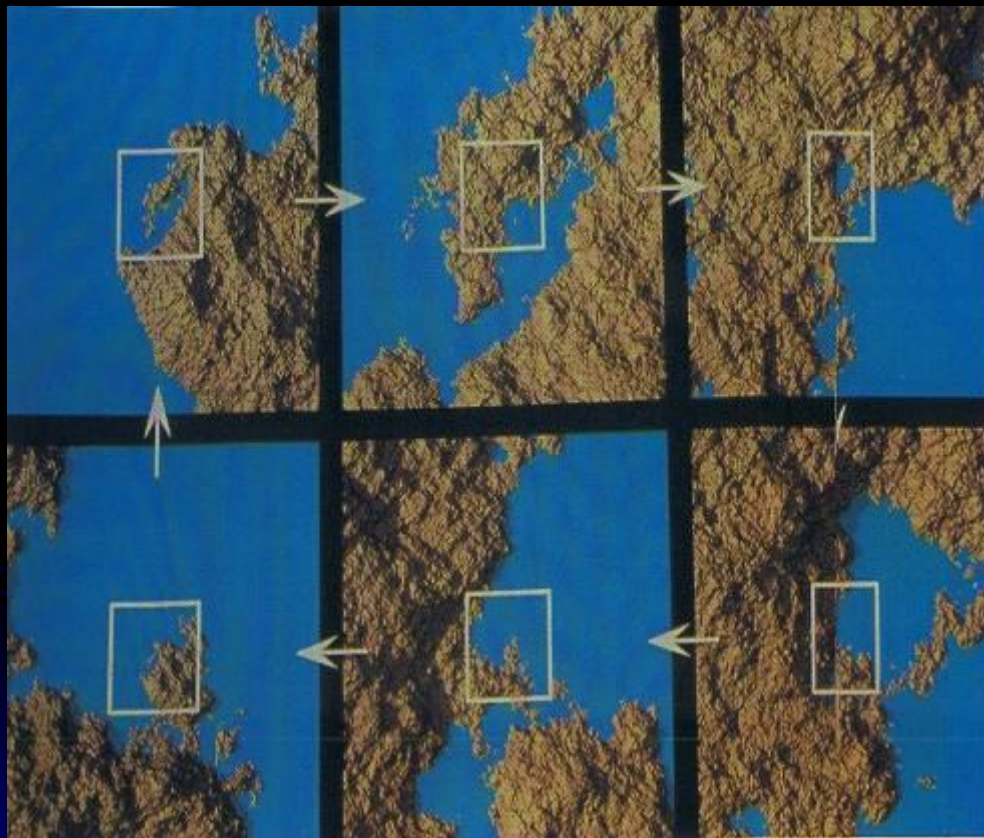
Što se više približimo, vidi se više detalja

Fraktalne planine

- Počinje se od osnovnog oblika planine
- Dijeleva se rubovi oblika
- Nepravilno izmiješati nove vrhove
- Rekurzivno ponavljanje
 - 2D za obale
 - 3D za planine

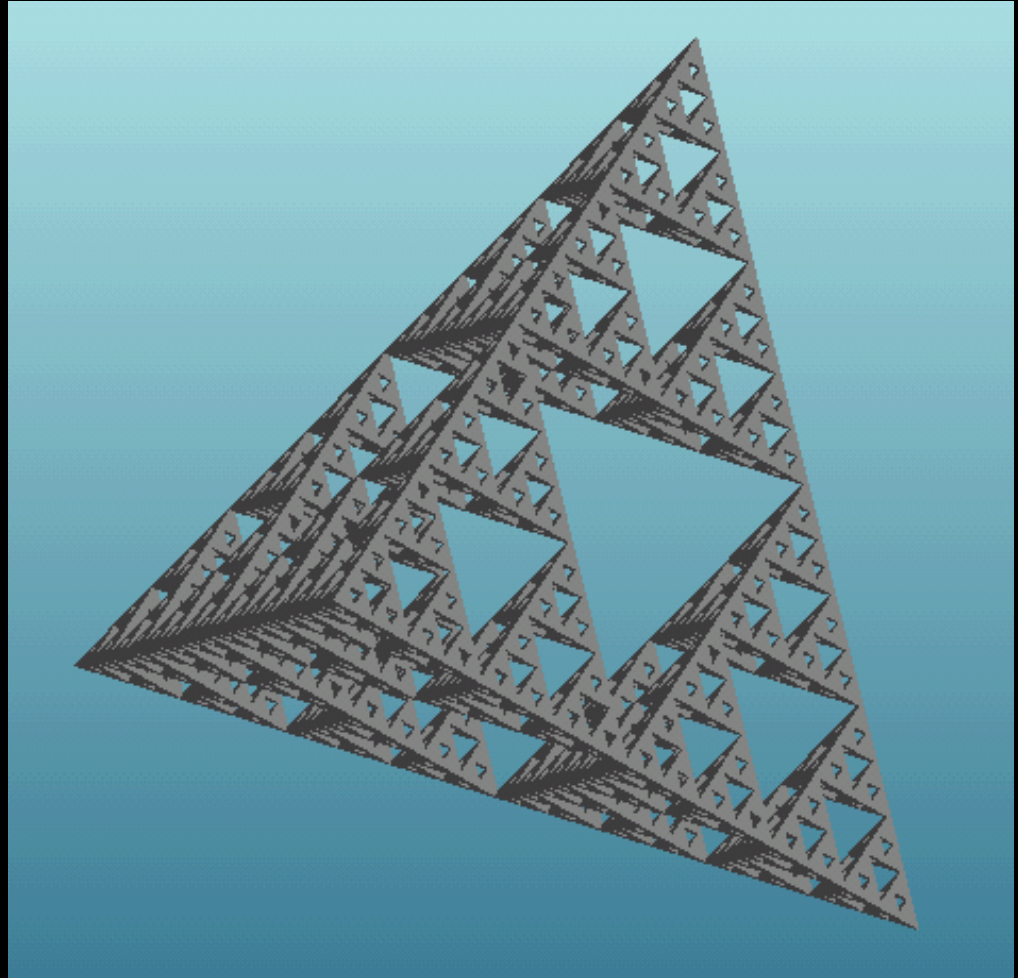


Fraktalne planine

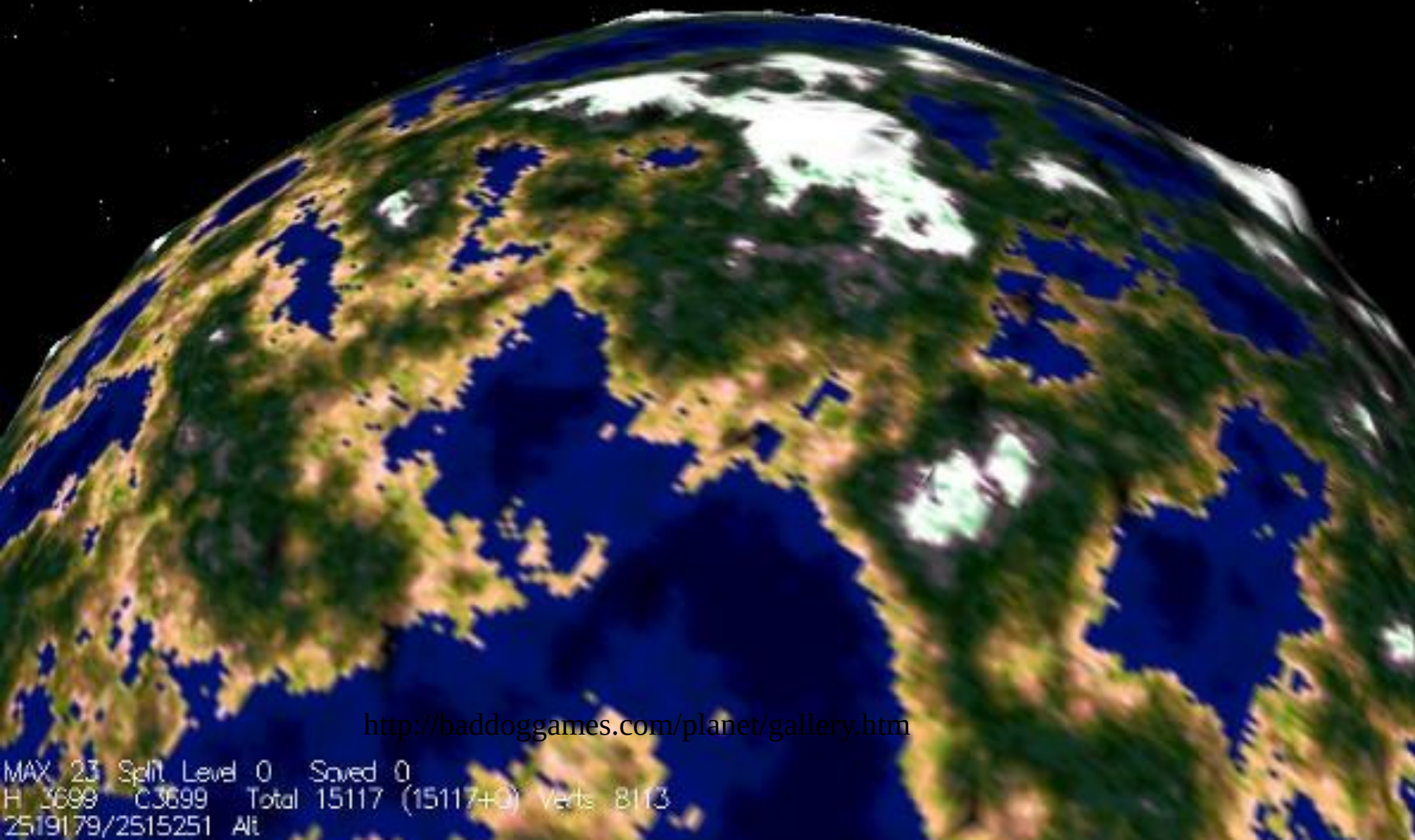


Sierpinski trougao

- Dimenzija
fraktala
 $1,584962501$



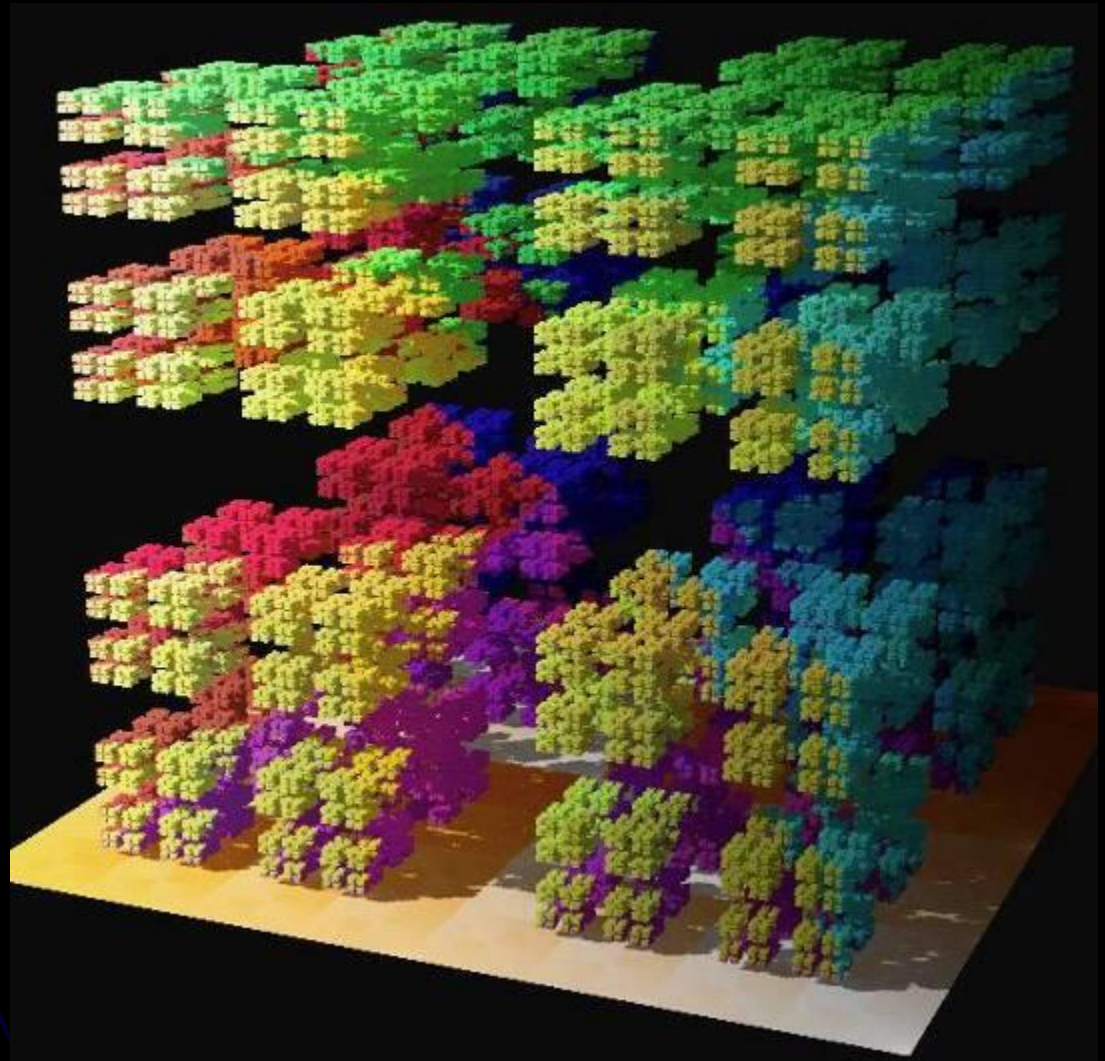
Fraktalne slike planete



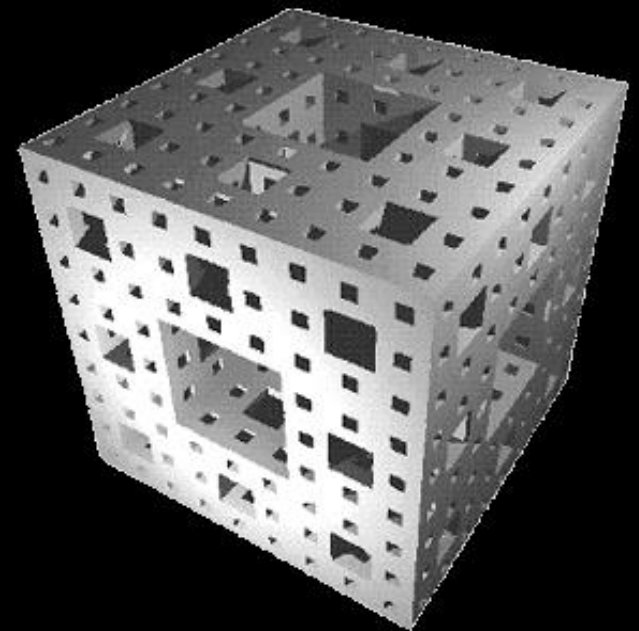
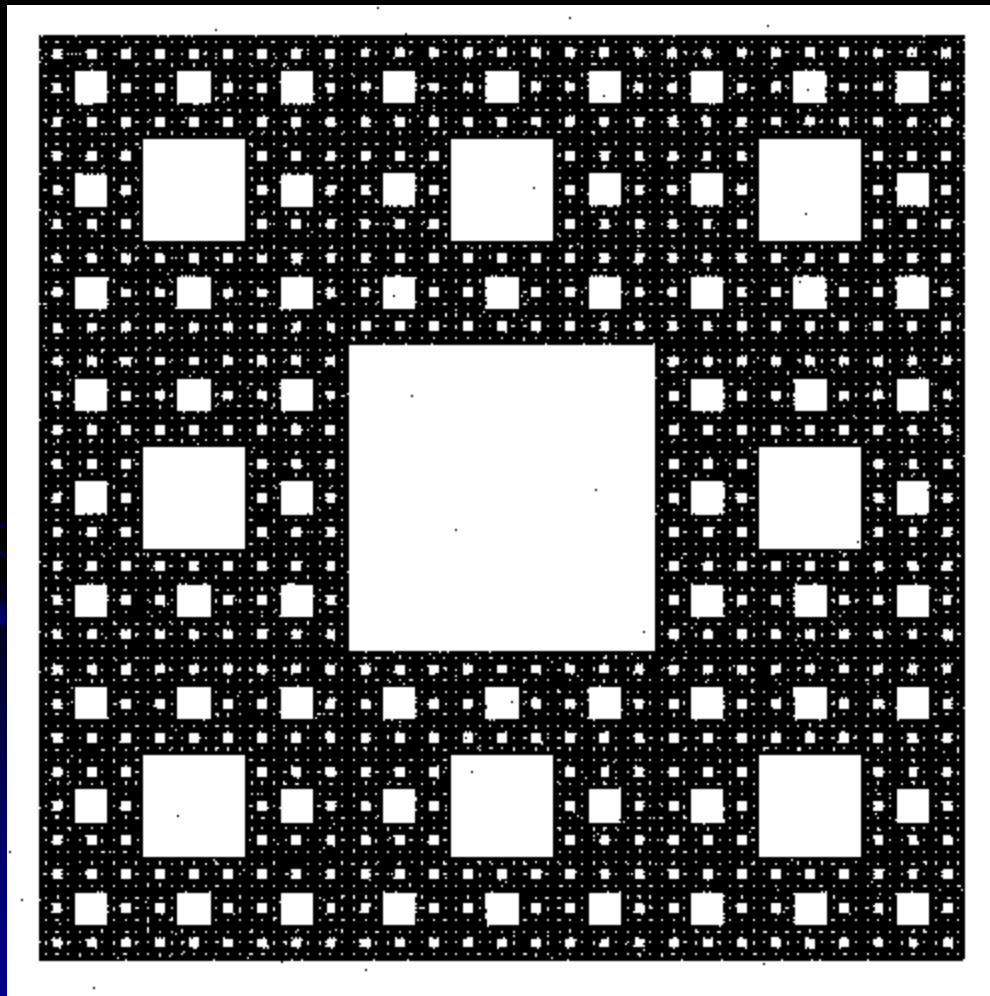
<http://baddoggames.com/planet/gallery.htm>

MAX 23 Split Level 0 Saved 0
H 3699 C3699 Total 15117 (15117+0) Verts 8113
2519179/2515251 Alt

3-D Cantor Set

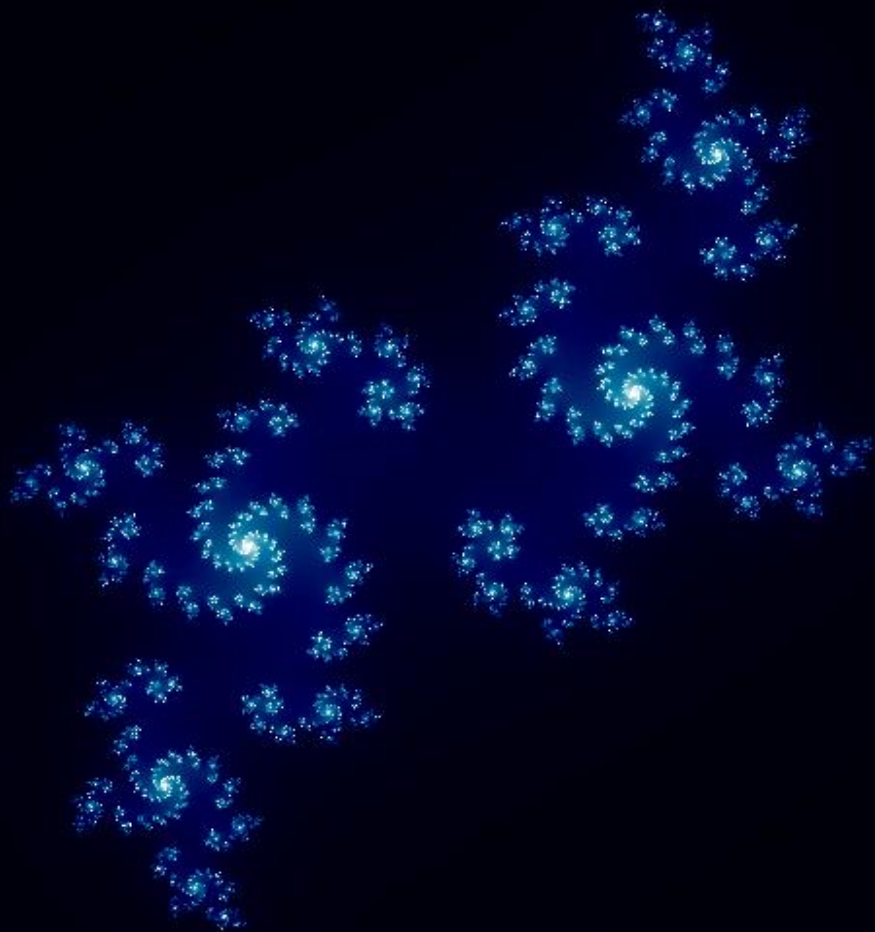


Sierpinski tepih

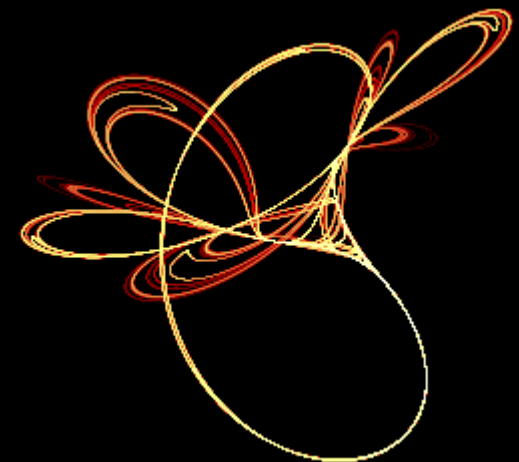
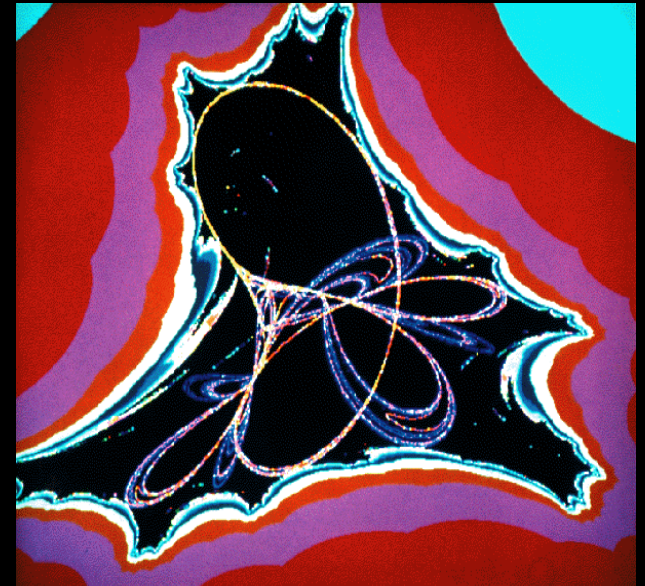
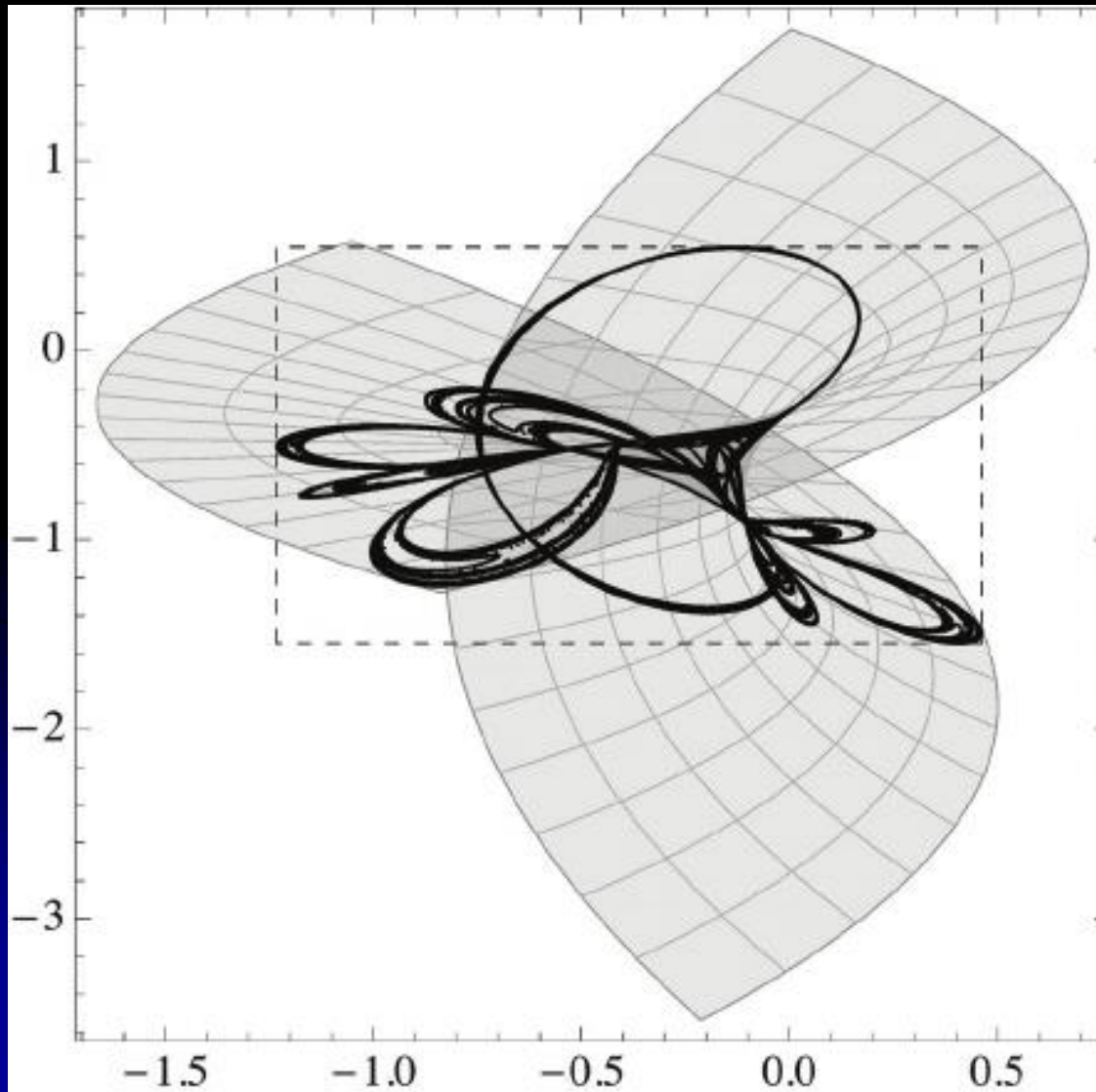


Menger spužva

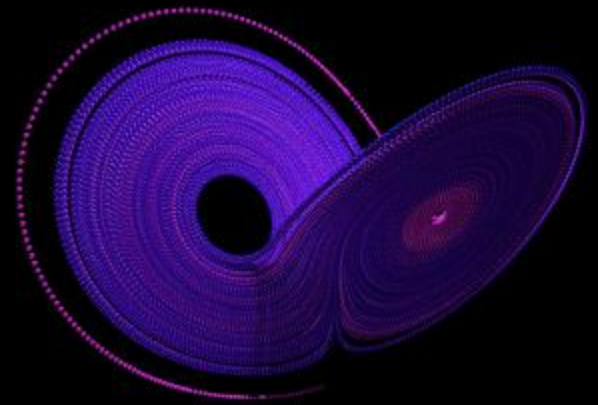
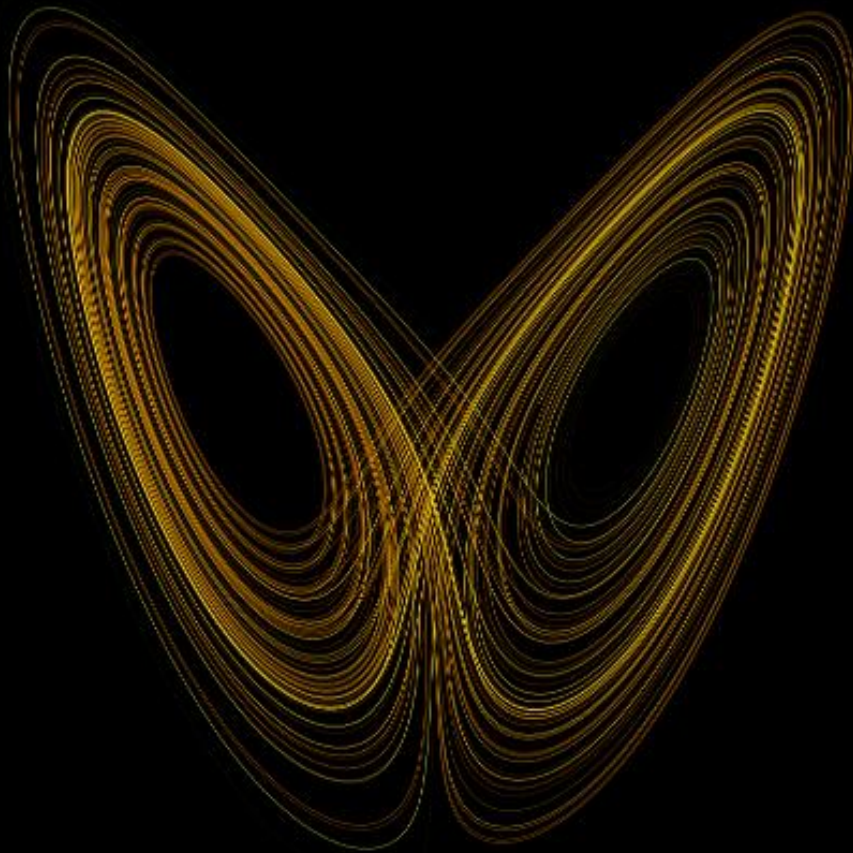
Julia set



Tinkerbell Attractor



Lorenz Attractor



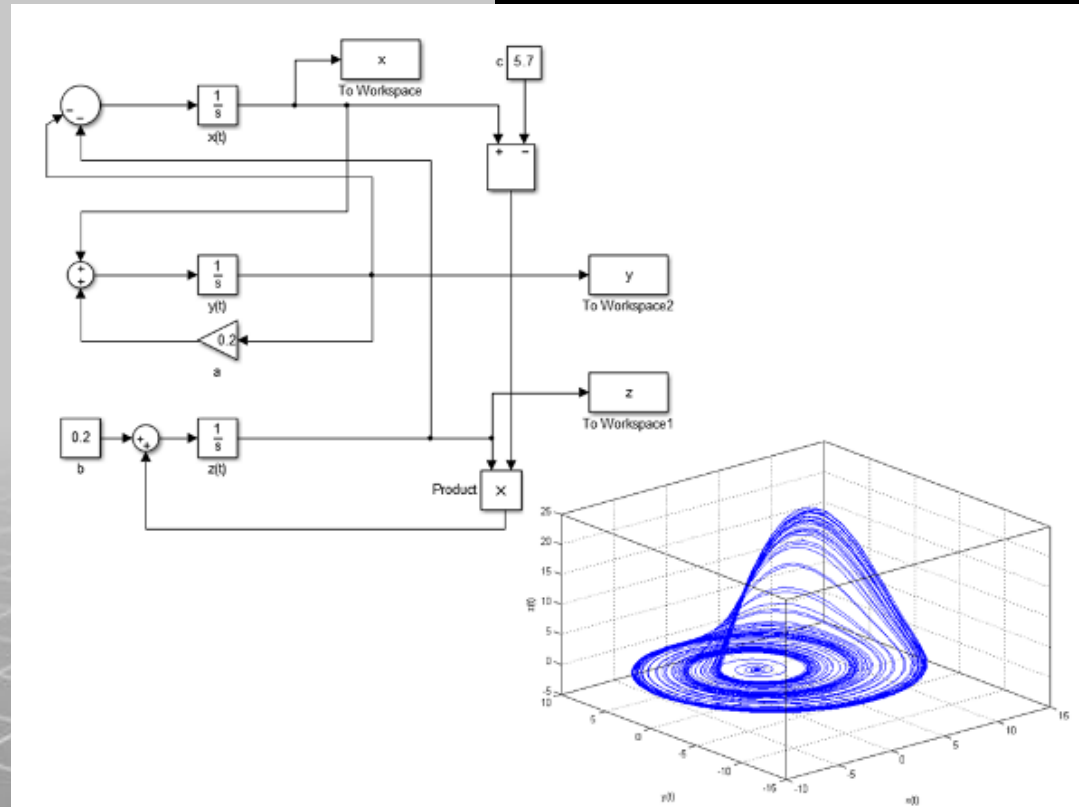
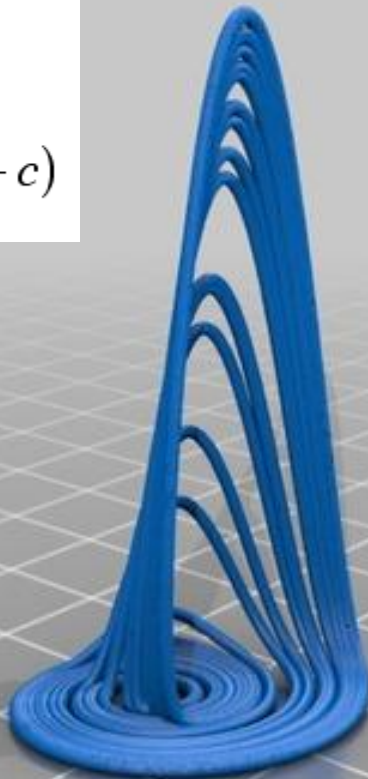
$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

Rossler Attractor

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= a + z(x - c)\end{aligned}$$



Wada Basin



```
global_settings {max_trace_level 1000}  
#declare a=sqrt(2);  
#declare  
    r=texture{pigment{color<1,1,1>}finis  
    h{ambient 0  
diffuse 1 reflection 1}}  
camera{location x-y+z look_at<0,0,0>  
light_source{<-3,-3,-3>color<0,1,0>  
light_source{<-3, 3, 3>color<0,0,1>  
light_source{< 3, 3,-3>color<1,0,0>  
sphere{z-x-y,a texture{r}}  
sphere{x+y+z,a texture{r}}  
sphere{y-x-z,a texture{r}}  
sphere{x-y-z,a texture{r}}
```



Romanesco

(vrsta brokule)



Praktična upotreba fraktala

- **Računarski sistemi** (Fraktalno arhiviranje, kompresija slike bez pikselacije)
- **Mehanika fluida**
 - Modulacija turbulentnog toka
 - Modulacija plamenih jezika
 - Porozni materijali imaju fraktalnu strukturu
- **Telekomunikacije** (antene fraktalnog oblika)
- **Fizika površina** (za opisivanje zakrivljenosti)
- **Medicina**
 - Interakcija biosenzora
 - Otkucaji srca
- **Biologija** (opis modela populacije)

